

Зайченко В.В.

Національний технічний університет України

«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

АНАЛІЗ МЕТОДІВ ЧАСОВИХ РЯДІВ НА ОСНОВІ КОЛИВАНЬ ВОЛАТИЛЬНОСТІ КОМПАНІЙ НІМЕЦЬКОГО РИНКУ

У статті проаналізовано два різних методи для прогнозування волатильності на фондовій біржі Німеччини. У першому підході використовуються комбінації методів часових рядів. Волатильність, яка застосовується у формуванні цін опціонів акцій німецьких компаній, є головною компонентою для другого підходу. Серед моделей часових рядів налічуються: модель стохастичної волатильності, чотири моделі ARCH типу, модель експоненціально зваженої ковзної середньої та модель історичного середнього значення.

Із використанням декількох моделей одновимірних часових рядів було спрогнозовано волатильності за допомогою ряду прибутковості DAX. Проаналізувавши вказаний ряд, зауважимо: помітно, що волатильність має тенденцію до кластерів і, крім того, не є постійною з плином часу. Для перевірки незалежності результатів було обрано декілька горизонтів прогнозу, а саме 1 торговий день, 10 торгових днів, 180 торгових днів та 45 календарних днів. Критеріями оцінки коректності та роботи моделей були декілька компонентів – функція втрат LINEX та середньоквадратична помилка прогнозування. Також було побудовано торгову стратегію для визначення корисності та ефективності моделей для прогнозування волатильності на основі часових рядів.

Провівши експериментальні дослідження, ми задокументували, що моделі сильно залежать від горизонтів прогнозу та вимірювань помилок. Аналіз результатів показав, що неможливо однозначно визначити, яка модель виграла. З одного боку, стохастична модель краще впоралася з прогнозуванням волатильності, яка застосовується у формуванні цін опціонів акцій німецьких компаній. Моделі ARCH типу краще застосовувати для мінімізації ризику оцінки вартості. Проаналізувавши торгову стратегію видно, що фактична волатильність має невелику похибку у порівнянні з волатильністю, яка була спрогнозована моделями часових рядів.

Ключові слова: часовий ряд, волатильність, моделі ARCH типу, стохастична модель, регресія, прогнозування, кореляційний аналіз.

Постановка проблеми. Існує два способи прогнозування волатильності. Перший метод використовує тільки історичну інформацію про прибутковість, тоді як другий обирає для розрахунків волатильність, що використовується у формуванні цін опціонів. Найвні емпіричні дані суперечать один одному в трьох аспектах. По-перше, в рамках першого методу продуктивність моделей залежить від даних, горизонту прогнозування, частоти вибірки та критеріїв оцінки. По-друге, в рамках другого методу через типову особливість передбачуваної волатильності не зовсім ясно, як витягти волатильність з цін опціонів. По-третє, порівнявши прогнози часових рядів із прогнозами опціонів, люди виявили суперечливі докази, наприклад, праці Джоріона та Фіглевські [5] для доказів за і проти прогнозів опціонів відповідно.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Останнім часом прогнозуванню нестабільності фінансового ринку приділяється значна увага в літературі академіками та практиками, зокрема

такими як С.-Х. Пун, Е. Грейнджер, К. Вест [1]. Хоча прогнозування волатильності є надзвичайно складним завданням, за словами Брейлсфорда та Фаффа [10], загалом вважається, що волатильність є передбачуваною, і тому ринок нестабільності не такий ефективний, як ринок прибутковості.

Стаття доповнює літературу трьома способами. По-перше, використано дані з країни, якій приділяється мало уваги в літературі, але яка все ж важлива в міжнародних рамках. По-друге, порівнюємо прогнози моделі стохастичної волатильності (далі - SV) з прогнозами опціонів. Модель SV забезпечує більш реалістичне і гнучке моделювання фінансових часових рядів, ніж моделі типу ARCH, оскільки вона, по суті, включає два шумових процеси. Краща відповідність моделі SV у вибірці порівняно з моделями ARCH типу було задокументовано в літературі (наприклад, праці J.L. Knight та S.S. Satchell [7]), однак моделі SV приділяється набагато менше уваги в літературі з прогнозування волатильності. Використовуючи

дані Нової Зеландії, Дж. Ю виявив, що модель SV працює краще, ніж усі інші одновимірні моделі часових рядів, включно з моделями архетипового типу [2]. Хоча останнім часом були спроби порівняти прогнози ARCH і прогнози опціонів, проте нічого не було зроблено для порівняння прогнозів SV і прогнозів опціонів. По-третє, горизонти прогнозу і вимірювання помилок були довільно обрані в літературі. У статті горизонти прогнозу та вимірювання помилок вибираються на основі використання прогнозів волатильності у фінансовій галузі. Зокрема, використовуємо ціноутворення опціонів і оцінку ризику (VAR) в якості практичного керівництва для вибору горизонтів прогнозу і вимірювання помилок.

Постановка завдання. Мета статті – порівняння двох основних підходів до прогнозування волатильності з використанням щоденних даних із німецького фондового ринку. Перший підхід використовує різні методи одновимірних часових рядів, а другий підхід – волатильність, що використовується у формуванні цін опціонів.

Виклад основного матеріалу дослідження. Важливість німецької економіки відбивається на її фондовому ринку, який займає четверте місце за ринковою капіталізацією і третє за оборотом. Зокрема, швидке зростання німецької біржі опціонів і ф'ючерсів, яка є другою за величиною у світі, демонструє, що німецький фондовий ринок привернув велику міжнародну увагу, порівнюючи ринкову капіталізацію та обороти на шести найбільших міжнародних ринках у світі.

Фондовий ринок Німеччини складається з восьми регіональних фондових ринків, де найбільш важливою є Франкфуртська біржа з 78% сукупного обороту. Усі ці регіональні ринки засновані на відкритій торгівлі. Акції на регіональних фондових ринках торгуються двома різними способами. Ціни відкриття, полудня і закриття кожної акції розраховуються з використанням аукціонної системи. Торгівля між ними відбувається звичайним (безперервним) способом. Ціна відкриття – це ціна, за якою торгується найбільша кількість акцій. Те ж саме відбувається на аукціоні о першій годині дня та на закритті аукціону о п'ятій вечора. Оскільки існує мінімальний розмір замовлення для безперервної торгівлі, аукціонна система гарантує, що всі запити, особливо невеликі, будуть виконані. Найголовніше, що система закриття аукціону гарантує, що для більшості акцій ціна закриття буде заснована на торгівлі о п'ятій вечора.

Індекс Deutsche Aktien (DAX) представляє 30 найбільших вітчизняних акцій, що коти-

руються в Німеччині. Наприкінці поточного року акції, включені в індекс DAX, становили 76% від загальної ринкової капіталізації в Німеччині і 80% обороту акцій у Франкфурті, що робить DAX вельми репрезентативним індексом для німецького фондового ринку [9].

Щоб легше сигналізувати інвесторам про волатильність, німецька фондова біржа в грудні 1994 року ввела індекс волатильності, заснований на передбачуваний волатильності опціонів DAX. Він називається VDAX. Індекс VDAX заснований на лінійній інтерполяції мінливості двох субіндексів, які найближче до терміну служби, що залишився в 45 календарних днів.

Один із рядів даних, який доступний у відкритому вигляді – це щоденний індекс DAX з 1 січня 1988 року по 30 червня 2021 року, заснований на щоденних цінах закриття аукціону на Франкфуртській фондовій біржі. Він використовує логарифмічну прибутковість, розраховану на основі ряду DAX, в результаті чого було отримано 2876 щоденних спостережень за прибутковістю.

Середня денна прибутковість серії DAX становить 0,0585%. Стандартне відхилення денної прибутковості становить 0,01259, що еквівалентно річній волатильності в 20%. Ряд також демонструє негативну асиметрію -0,802 і надлишковий ексцес 9,8, що вказує на те, що доходи розподіляються ненормально [6].

За використання високочастотних даних, таких як дані по тіках, особливу увагу слід приділяти можливій негативній автокореляції, викликаній «відскоком попиту і пропозиції». Якщо ціни записуються з транзакцій, ціна кожної транзакції може коливатися між цінами пропозицій, викликаючи негативну автокореляцію. Нехтування негативною послідовною автокореляцією призведе до зміщення в бік підвищення оцінки денної волатильності.

Щоб оцінити ефективність різних методів, необхідно порівняти прогнозовані коливання з фактичними коливаннями. На жаль, фактична волатильність безпосередньо не спостерігається, і тому її необхідно оцінити. Поширений підхід у літературі полягає у використанні абсолютної або квадратної денної прибутковості для оцінки денної волатильності.

Було виявлено, що можна поліпшити оцінку фактичної волатильності на основі високочастотних даних. Наприклад, використовуючи 5-хвилинні внутрішньоденні дані, Т. Андерсен і Т. Боллерслев виявили, що модель GARCH забезпечує точні прогнози волатильності, а Б. Блер, С.-Х. Пун і С.Дж. Тейлор підтверджують це, повідомляючи

про збільшення на 11,5% до 41,4% прогнозу на один день вперед, коли денна волатильність була оцінена з використанням високочастотних даних [10]. Оскільки є тільки набір даних з щоденною частотою, ми обчислюємо волатильність за певний період просто як квадратний корінь з суми квадратів щоденної прибутковості за цей період:

$$G_t = \sqrt{\sum_{i=1}^{N_T} r_i^2}$$

Моделі прогнозування, що використовують лише історичну інформацію про повернення, включають модель історичного середнього, модель експоненціально зваженої ковзної середньої (EWMA), модель GARCH, модель GJR-ГРАХА, модель EGARCH, модель GARCH-M і модель SV [8]. Модель історичного середнього, модель EWMA, модель GARCH і модель GJR-GRACH належать до другого підходу [3].

Модель EGARCH (p,q) визначається за формулами:

$$r_t = \mu + \sigma_t \varepsilon_t$$

$$\log \sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i |\varepsilon_{t-i}| + \sum_{i=1}^q \gamma_i |\varepsilon_{t-i}| + \sum_{j=1}^p \beta_j \log \sigma_{t-j}^2$$

Модель GARCH-M(p,q) визначається за формулами:

$$r_t = \mu + \delta \sigma_t^2 + \sigma_t \varepsilon_t$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i r_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^2$$

Параметри системи у всіх моделях аروحного типу оцінюються з використанням методу максимальної правдоподібності. Параметри затримки p і q вибираються з використанням критерію ВІС. Щоб отримати прогноз волатильності на t крок вперед, ми користуємося формулою Енджело [4].

Модель SV визначається

$$r_t = \mu + \exp\left(\frac{h_t}{2}\right) \varepsilon_t$$

$$h_t = \mu + \alpha h_{t-1} + \eta_t$$

У порівнянні з моделями типу ARCH модель SV забезпечує більш гнучке моделювання фінансових часових рядів, оскільки вона включає два шумових процеси: один для спостережень і один для прихованої волатильності. На жаль, функція правдоподібності для моделі SV не має вираження в замкнутій формі, і тому застосовна оцінка максимальної правдоподібності (ML).

Перш ніж провести оцінку моделі, потрібно вирішити два питання. Перше – про те, як поділити вибірку. 2126 спостережень з 4 січня 1988 року по 28 червня 2010 року використовуються для підгонки моделей, а період без вибірки

охоплює решту 750 спостережень з 1 липня 2010 року по 30 червня 2020 року. Цей поділ є довільним, але період поза вибіркою охоплює періоди як низької, так і надзвичайно високої волатильності в 1998 році, що ускладнює точні прогнози волатильності. Інше питання полягає в тому, яку вибірку повинні використовувати для підгонки моделі, оскільки стануть доступні додаткові спостереження після 28 червня 2020 року. У статті використовується метод розширення. Тобто, починаючи з останнього дня періоду поза вибіркою, обчислюється прогноз волатильності для кожного горизонту.

Потрібно підкреслити, що тести, які будуть описані нижче, засновані на середніх помилках. Можна використовувати тестову статистику для порівняння відмінностей між двома розподілами помилок, наприклад, як це робили К. Вест і Д. Чо [1]. Хоча такий тест дозволяє зробити статистичний висновок про продуктивність моделі, у фінансах більш привабливим підходом є використання економічних міркувань для порівняння. У цій статті використовується торговельна стратегія для перевірки корисності моделей часових рядів.

Ця торгова стратегія заснована на купівлі або продажу колл-опціонів за індексом DAX. Формула ціноутворення опціонів є позитивною функцією очікуваної волатильності базової ціни акцій. Якщо відома майбутня волатильність, то створюється безризиковий портфель, через купівлю опціону та продаж базової акції чи індексу. Однак, оскільки очікувана або передбачувана волатильність опціону є тільки прогнозом, ця стратегія не є безризиковою і може принести прибуток або збиток залежно від істинної волатильності. Якщо справжня волатильність менша за передбачувану волатильність, покупка недооціненого опціону й продаж базової акції приносять прибуток. Аналогічно, продаж явно переоціненого опціону і покупка базової акції повернуть прибуток. Якщо прогнози волатильності, отримані за допомогою моделей часових рядів, перевершують передбачувану волатильність, можна використовувати цю торговельну стратегію для отримання прибутку.

Оскільки опціони, що використовуються для цієї торгової стратегії, мають терміни погашення від 10 до 45 календарних днів, оптимальна модель часових рядів обирається на основі середнього значення MAPE для тесту горизонту в 45 календарних днів і тесту горизонту в 10 торгових днів.

Використовуючи розрахункові (заключні) ціни для опціонів DAX з 2 липня 2020 року по 15 жовтня 2020 року, розраховується для кожного дня

припущена волатильність, заснована на опціоні за викликом з мінімальним терміном погашення (мінімум 10 днів) і припущена волатильність, заснована на середньостроковому опціоні з терміном погашення 45 та 180 днів. Ці дві передбачувані волатильності потім порівнюються з прогнозами, згенерованими моделлю EGARCH для горизонтів, що відповідають термінам погашення опціонів. Якщо прогноз моделі EGARCH на 20% перевищує передбачувану волатильність, купується опціон колл; якщо прогноз моделі EGARCH на 20% нижчий, опціон колл продається. Дохід – це дисконтовані витрати (виручка) від покупки (продажу) базового індексу, поділені на премію за опціон. Адже торгівля самим індексом надзвичайно витратна, і враховуючи, що висока неподільність фактично неможлива, використовується майбутнє індексу DAX в якості основи. Транзакційні витрати ф'ючерсу складаються зі ставки-попиту в розмірі 0,5 індексних пунктів від розрахункової ціни і комісії в розмірі 1 євро за торгування ф'ючерсами, яку стягує EUREX. Ці транзакційні витрати типові для інституційних інвесторів і становлять лише частину витрат, які заплатили б роздрібні інвестори, виконуючи арбітраж по волатильності.

Низька стійкість моделі EGARCH очевидна. Для опціону з більш коротким терміном погашення (позначимо як варіант 1) у 29 з 45 торгових днів прогноз моделі EGARCH на 20% нижчий за передбачувану волатильність і на один день на 20% вищий. Для опціону з більш тривалим терміном погашення (позначимо як варіант 2), 35 з 45 торгових днів десять прогнозів волатильності моделі EGARCH на 20% нижчі, ніж реальна волатильність, і ніколи не перевищують припу-

щену волатильність. Це призводить до 29 угод для варіанту 1 і 35 угод для варіанту 2.

В результаті очікуємо, що якщо наша модель передбачає, що реалізована волатильність нижча, ніж мається на увазі в ціні опціону, ця угода принесе прибуток. Збиток виникне, коли реалізована волатильність виявиться вища за передбачувану.

На рисунку показано, що дані підтверджують це очікування, оскільки більшість точок знаходяться в першому і третьому квадранті, тоді як відхилення викликані транзакційними витратами й недосконалістю ринку. Це також показує, що не всі угоди приносять позитивний прибуток. Насправді середня прибутковість негативна (-9,1%), хоча вона дуже мала і частково викликана транзакційними витратами. Що ще цікавіше, для 29 угод варіанту 1 середня прибутковість позитивна (0,89%), тоді як 45 угод варіанту 2 приносять середню прибутковість -18,9%. Цей результат зумовлений низькою стійкістю, в результаті чого модель EGARCH більшою мірою недооцінює волатильність для варіанту 2, ніж для варіанту 1.

Таблиця 1

Порівняння середньої зміни волатильності

	10 днів	45 днів	180 днів
Реальні значення	29.5%	239%	449%
EGARCH	28.9%	202%	403%
GARCH	28.4%	247%	467%
SV	23.2%	226%	425%

Висновок із цієї торгової стратегії полягає в тому, що моделі часових рядів не краще передбачають волатильність, ніж передбачувана волатильність, хоча, за загальним визнанням, ця торгова стратегія навряд чи є репрезентативною.

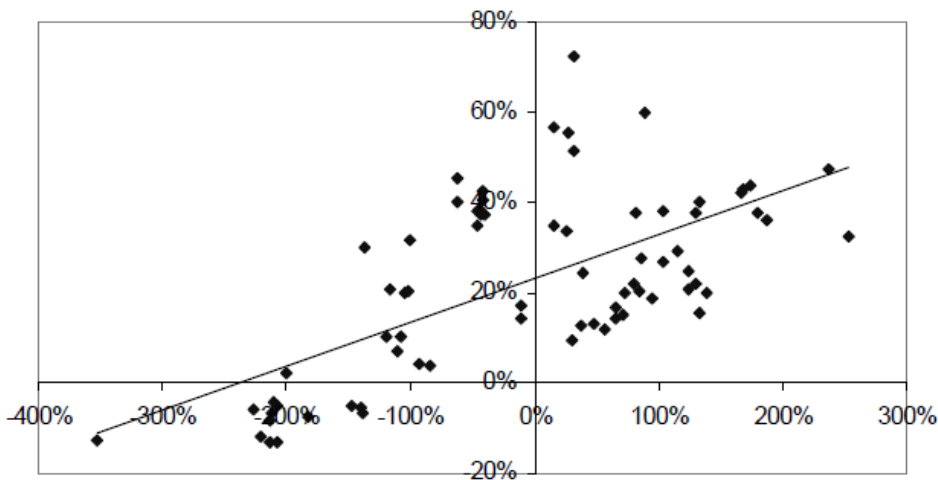


Рис. 1. Графік відхилення між передбачуваною та реалізованою волатильністю

Висновки. Порівнявши два основні підходи до прогнозування волатильності на німецькому фондовому ринку, можемо сказати таке. Результати дослідження показують, що ранжування чутливе до вимірювань помилок, а також до горизонтів прогнозу. Проаналізувавши результати, неможливо однозначно визначити, яка модель має гіршу похибку. Стохастична модель краще впоралася з прогнозуванням волатильності, яка застосовується у формуванні цін

опціонів акцій німецьких компаній. Моделі ARCH типу краще застосовувати для мінімізації ризику оцінки вартості. Проаналізувавши торгову стратегію, бачимо, що фактична волатильність має невелику похибку порівняно з волатильністю, яка була спрогнозована моделями часових рядів, що узгоджується з висновками Б. Блера, С.-Х. Пуна і С.Дж. Тейлора. Програмне забезпечення з названої теми буде реалізоване з подальшими дослідженнями.

Список літератури:

1. West K., Cho D. The predictive ability of several models of exchange rate volatility". *Journal of Econometrics*. 1995. 69(2). 367–391.
2. Yu, J. Forecasting volatility in the New Zealand stock market. *Applied Financial*. 1999.
3. Sandmann G., Koopman S.J. Estimation of Stochastic Volatility Models via Monte Carlo Maximum Likelihood. *Journal of Econometrics*. 1998. 87. 271–301.
4. Engle R.F., Ng K.V. Measuring and testing the impact of news on volatility. *The Journal of Finance*. 1993. 48(5). 1749–1778.
5. Figlewski S. Options Arbitrage in Imperfect Markets. *Journal of Finance*. 1989. 44. 1289–1311.
6. Nelson D.B. Conditional heteroskedasticity in asset returns: A new approach. *Econometrica*. 1990. 59. 347–370.
7. Knight J.L., Satchell S.S., Yu J. Efficient estimation of the stochastic volatility model by the empirical characteristic function. Working paper, The University of Western Ontario, 1998.
8. Glosten L.R., Jagannathan R., Runkle D. On the relation between the expected value and the volatility of the normal excess return on stocks. *Journal of Finance*. 1993. 48. 1779–1801.
9. Gemmill G. The forecasting performance of stock options on the London Traded Option Markets. *Journal of Business Finance and Accounting*. 1986. 13,4. 535–546.
10. Blair B., Poon S.-H., Taylor S.J. Forecasting S&P 100 Volatility: The Incremental Information Content of Implied Volatilities and High Frequency Index Returns. *Journal of Banking and Finance*. Forthcoming, 2000.

Zaichenko V.V. ANALYSIS OF TIME SERIES METHODS BASED ON FLUCTUATION VOLATILITY OF GERMAN MARKET COMPANIES

This article presents two different approaches for market volatility prediction in the German stock exchange (DAX). The first approach leverages a combination of time-series methods. The second approach is based on the volatility used for the formation of stock options for German companies. Time series models include: the stochastic volatility model; four arch-type models; one exponentially weighted moving average model; one historical average model.

Predicted the volatility using several one-dimensional time series models. Upon analysis, notice that volatility tends to cluster and changes over time. Selected different forecast horizons: 1 trading day, 10 trading days, 180 trading days, 45 calendar days to check the independence of the results. Used the LINEX loss function and the root-mean-square prediction error as criteria for evaluating the correctness for market volatility prediction. Then elaborated a strategy to determine usefulness and effectiveness of volatility prediction models based on time series.

Experimental studies showed that the models are strongly dependent on the forecast horizons and measurements errors. Examination of the results does not lead to a clear conclusion on which model is the best. The stochastic model allowed for high fidelity in volatility prediction, and it's used in the formation of stock options prices in German companies. Arch-type models excel when the main goal is minimizing the risk of cost estimation. After analyzing the trading strategy, conclude that the actual volatility and the volatility predicted by the series differ by minor errors.

Key words: time series, volatility, ARCH type models, stochastic model, regression, prediction, correlation analysis.